# 臺北市立內湖高級中學

# 14 學年度第 3 次正式教師甄選$\boxed{\text{數學科}}$初選筆試試題卷

$5\cdot\frac{4}{5}=20$

二、計算證明題（每題 8 分）

1. 在坐標平面上，設點 $P(4,4)$、$Q(10,-2)$，已知直線 $L$ 通過原點 $O(0,0)$，且 $A$、$B$、$C$、$D$ 為直線 $L$ 上相異四點，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，$\angle PAB=\angle PBQ=\angle PCQ=\angle CDQ=90^\circ$，則直線 $L$ 的斜率為何？

$y=\frac{1}{2}x$

$S_n=2^n-1\equiv 10a_n+b_n \pmod{100}$　$(2,25)=1 \Rightarrow 2^{\phi(25)}\equiv 1 \pmod{25}$

$\boxed{3}$ $2^n \pmod{100}$ 的餘數列為週期20的循环数列

2. 在坐標平面上，已知 $P$、$Q$ 兩點都在 $y=\left[2^{|x|}-2\right]$ 的圖形上，其中[ ]為高斯函數，且 $P$ 點在此圖形的最低點，$Q$ 點的 $y$ 坐標為 1，且則直線 $PQ$ 的斜率 $m$ 的範圍為何？

$\Rightarrow \langle 10a_n+b_n\rangle$ 為循环数列 $\Rightarrow 0.a_1b_1\cdots$ 為循环小数

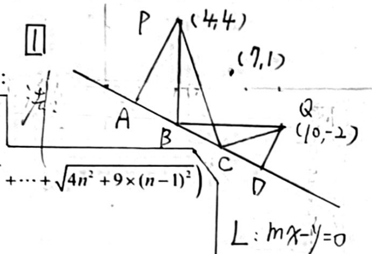
3. 設 $S_n$ 是首項為 1，公比為 2 的等比級數，設 $a_n$ 為 $S_n$ 的十位數，$b_n$ 為 $S_n$ 的個位數，試證：無限小數 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\cdots$ 為有理數。

三、大考試題講解（每題 8 分）

1. 112 年分科測驗數學甲的單選第 3 題的題目如下：

> 3. 試問極限
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times 1^2}+\sqrt{4n^2+9\times 2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$$
>
> 的值可用下列哪一個定積分表示？
>
> (1) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　(2) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　(3) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$
>
> (4) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　(5) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

$\boxed{1}$ 法1



$L: mx-y=0$

$x_A=4-\frac{4m-4}{m^2+1}\cdot m=\frac{4+4m}{m^2+1}$

$x_D=10-\frac{10m+2}{m^2+1}\cdot m=\frac{10-2m}{m^2+1}$

$x_B=\frac{1}{m^2+1}\left(4+4m+\frac{1}{3}(6-6m)\right)$

$x_C=\frac{1}{m^2+1}=\left(4+4m+\frac{2}{3}(6-6m)\right)$

$\begin{cases}(x-7)^2+(y-1)^2=18\\ y=mx\end{cases} \Rightarrow (m^2+1)x^2-(2m+14)+32=0$

$x_B+x_C=x_A+x_D$

$x_Bx_C=\frac{32}{m^2+1}=\frac{(6+2m)\cdot 8}{(m^2+1)^2}$

$\Rightarrow 2(m^2+1)=m+3$

$\Rightarrow 2m^2-m-1=0$

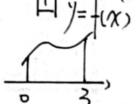
$\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$ or $1$ (不合)

(1) 試寫出詳細的解題步驟，並加以說明如何引導學生這一題的解法。（3 分）

(2) 若延伸此題如下，試寫出詳細的解題步驟。（5 分）

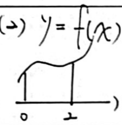
> 設 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times 1^2}+\sqrt{4n^2+9\times 2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)=\int_0^2 f(x)dx$，試寫出 $f(x)$。

$\boxed{1}$ $y=f(x)$



(1) $\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3}{n}k\right)^2}\to\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

(2) $y=f(x)$



$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2k}{n}\right)^2}\to\int_0^2\frac{3}{2}\sqrt{4+\frac{9}{4}x^2}\,dx$

2. 112 年學測數學 B 的選填第 17 題的題目如下：

108

> 17. 考慮所有只用 0, 1, 2 三種數字組成的序列，序列長度 $n$ 是指該序列由 $n$ 個數字組成（可重複出現）。令 $a(n)$ 為在所有長度 $n$ 的序列中連續兩個零（即 00）出現的次數總和。
>
> 例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000，001，002，100，200，其中 000 貢獻 2 次 00，其餘各貢獻 1 次 00，故 $a(3)=6$。則 $a(5)$ 的值為 (17-1)(17-2)(17-3)。

試寫出兩種不同的解法，並分別指出對應高中數學哪一冊的單元或概念。（每一種解法 4 分）

三 $\boxed{1}$ 法2

ahliang6897　$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\cos\theta\right|=\frac{1}{2}\overline{BC}$

$18-\frac{(7m-1)^2}{m^2+1}=\frac{((1,-1)\cdot(1,m))^2}{m^2+1}$

$\Rightarrow -3|m^2+14m+17=m^2-2m+1$

$\Rightarrow 2m^2-m-1=0$

$\Rightarrow \sim$ #

三 $\boxed{2}$

法1: 00 $\underset{2}{\overset{0}{1}}\ \underset{2}{\overset{0}{1}}\ \underset{2}{\overset{0}{1}}$　$4\times 3^3=108$

"yadis"

ex：10002

-00-- 分别算

--00- 一次

法2: $\underline{\quad n-1\quad}\ 2$　$\underline{\quad n-1\quad}\ 0$　$\underline{\quad n-2\quad}\ 00$

$a_n=2a_{n-1}+a_{n-1}+3^{n-2}$

(原本次数＋增加次数)

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 3+3 = 6 | 18+9 = 27 | 81+27 = 108 |

二、$\boxed{2}$ $P(0,-1)$

$1\le 2^{|x|}-2<2$

$\Rightarrow \log_2 3\le|x|<2$

当 $x_Q>0$，$m\in\left(1,\frac{2}{\log_2 3}\right]$

even function $\Rightarrow\left[\frac{-2}{\log_2 3},-1\right)\cup\left(1,\frac{2}{\log_2 3}\right]$