臺北市立內湖高級中學
14學年度第3次正式教師甄選數學科初選筆試試題卷

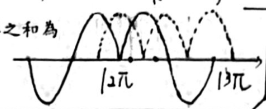
一、填充題（每題5分） 2026.1.30(五)～2.3(二) Ru

$2\sqrt{2}$ 1. 設 n 為正整數，在坐標平面上，$x^{2n}+y^{2n}=1$ 的圖形相距最遠的兩點距離為 d_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=$

$\boxed{1}$ superellipse → 正方形 $(\pm1,\pm1)$，$\sqrt{(x-(-x))^2+(y-(-y))^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$ 当 $x=y$，$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}$，$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1$ $\Rightarrow d_n\to 2\sqrt{2}$

$\frac{49\pi}{2}$ 2. 方程式 $\sin|2x|=|\cos(2x)|$ 在區間 $[-12\pi,13\pi]$ 的所有解之和為

$\boxed{2}$ $12\pi+\alpha+12\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{49\pi}{2}$



$\left(\frac{2}{3},0\right)$ $(1,\sqrt{3})$ $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left(\frac{2}{3},\sqrt{7}\right)$ 3. 設 $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最小值 b，則數對 $(a,b)=$

$\boxed{3}$ $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2}\geq\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{7}$

$\frac{c}{b}=\frac{\alpha^2(\frac{1}{r}+1+r)}{-\alpha(\frac{1}{r}+1+r)}=-\alpha$ $=-2i$ or $\sqrt{3}+i$ or $-\sqrt{3}+i$

$-\sqrt{3}+i$, $-2i$, $\sqrt{3}+i$ 4. 複係數方程式 $x^3+bx^2+cx+8i=0$ 的三根成等比數列（公比不一定是實數），則 $\frac{c}{b}$ 所有可能的值為

$\boxed{4}$ 3根 $\frac{\alpha}{r},\alpha,\alpha r$，$\alpha^3=-8ie^{i(2k\pi)}\Rightarrow\alpha=2ie^{i(2k\pi/3)}$，$k=0,1,2$ $\Rightarrow 2i$ or $2i(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ or $2i(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

-2 5. 若 $10^n\cdot(C_1^{2025}-3C_3^{2025}+5C_5^{2025}-7C_7^{2025}+9C_9^{2025}-\cdots-2023C_{2023}^{2025}+2025C_{2025}^{2025})$ 為整數，則整數 n 的最小值為________。

$\boxed{5}$ 令 $f(x)=(1+ix)^n\Rightarrow f'(x)=n(1+ix)^{n-1}\cdot i$　$Re(2025(1+i)^{2024}i)\Rightarrow 3^4\cdot5^2\cdot2^{1012}\in\mathbb{Z}$　当 $\square=2$　$n=-2$

4165? 6. 若依照數字排列的規律將下列表格填滿，則第11列中所有數字的總和為________。

	第1行	第2行	第3行	⋯			第20行
第1列	1	2	4	7	11	⋯	
第2列	3	5	8	12			
第3列	6	9	13				
⋮	10	14		⋱			
	15						
	⋮						
第20列							

$\boxed{6}$ $a_{(11,1)}=1+2+\cdots+11=66$

$66\times20+(11+(11+12)+\cdots+(11+\cdots+29))$

$11\times19+12\times18+\cdots\ 29\times1$

$=\sum\limits_{k=1}^{19}k(30-k)=30\cdot10\cdot19-\frac{19\cdot20\cdot39}{6}$

$=10\cdot19\cdot17\Rightarrow3230+1320=4550$

$\boxed{7}$ 10^0

6661	4
6652	12
6643	12
6553	12
6544	12
5554	4

法1 $\frac{52}{56}=\frac{13}{14}$

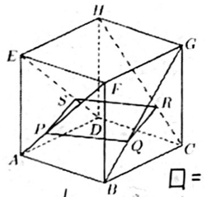
$\boxed{7}$ 法2：对称性
max min
$24+4-19=9$
和=19的組合數 ~ 9 ~ 相同
$H^4_{9-4}=56$ $\Rightarrow\frac{56-4}{56}=\frac{13}{14}$
$6111\to4$

$\frac{13}{14}$ 7. 擲4顆骰子，在點數和為19的條件下，至少有一顆點數為6點的機率為________。

$\left(6,23,\frac{-9}{2}\right)$ 8. 矩陣 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1&2&0&0\\a_2&b_2&c_2&0&-1&0\\a_3&b_3&c_3&0&0&1\end{bmatrix}$ 經矩陣列運算後可得 $\begin{bmatrix}2&0&0&4&2&1\\0&3&0&2&1&4\\0&0&4&1&4&2\end{bmatrix}$，則方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=12\\a_2x+b_2y+c_2z=15\\a_3x+b_3y+c_3z=18\end{cases}$ 的解 $(x,y,z)=$ $\Rightarrow x=6,\ y=23,\ z=\frac{-9}{2}$

$\boxed{8}$ $E\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\2&1&4\\1&4&2\end{bmatrix}\Rightarrow E=E\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&4\\\frac{1}{2}&-4&2\end{bmatrix}$，$EA\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}12\\15\\18\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&4\\\frac{1}{2}&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\15\\18\end{bmatrix}$

$\frac{2}{3}$ 9. 如圖，$ABCD$-$EFGH$ 為一邊長為1的正立方體。P、Q、R、S 四動點分別在 $\overline{AF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CH}$、$\overline{DE}$ 上，且四邊形 $PQRS$ 平行正方體的底面 $ABCD$，則當 P 點從 A 點沿著 $\overline{AF}$ 移動到 F 點時，四邊形 $PQRS$ 的軌跡形成的立體圖形體積為



$\boxed{9}$ $A(0,0,0)$
$P(t,0,t)$
$R(1-t,1,t)$
$\square=(对角线)^2\times\frac{1}{2}$
$\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1((2t-1)^2+1)\,dt=\int_0^1(2t^2-2t+1)\,dt=\frac{2}{3}$

$\boxed{10}$ random walk
甲:m元，乙:n元
$(p=\frac{1}{6}\quad q=\frac{5}{6})$
a_k≡甲有k元時，win的prob
公式：$a_m=\frac{1-(q/p)^m}{1-(q/p)^{m+n}}$

0　2　4
lose　win
$a_2=\frac{5^2-1}{5^4-1}=\frac{1}{26}$

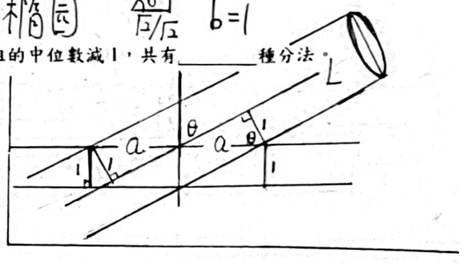
or $a_1=\frac{1}{6}a_2+\frac{5}{6}a_0=\frac{1}{6}a_2$
代入 $a_3=\frac{1}{6}a_4+\frac{5}{6}a_2=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}a_2$
$a_2=\frac{1}{6}a_3+\frac{5}{6}a_1=\frac{1}{36}(10a_2+1)\Rightarrow\frac{1}{26}$#

$\frac{1}{26}$ 10. 動點 P 一開始在數線的原點，今擲一枚公正的骰子，若出現點數1，則 P 點往右跳一單位，若出現其他點數，則 P 點往左跳一單位，當 P 點跳到2或 -2 時結束，則 P 點最後停在2的機率為________。

$\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$ 11. 在坐標空間中，有一平面 $E:x-y+z=3$ 和一射線 $L:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=1-t\end{cases}$，$t\geq0$，若一半徑為1的球與平面 E 相切，也與射線 L 相切，則此球的球心軌跡所圍成的區域面積為________。

改成 $z=1+t$

$\boxed{11}$ $\cos\theta=\frac{(2,1,1)\cdot(1,-1,1)}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$　圆柱截面 ↳椭圆　$\frac{3}{\sqrt{2}}$ θ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$　$a=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow\pi ab=\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$　$b=1$



10种 12. 將1到10的10個正整數分成 A、B 兩組，每組各5個數，已知 A 組的算術平均數恰等於 B 組的中位數減1，共有________種分法。

$\boxed{12}$ $M_e=6$
Sum=25
x,y,z, $u,w\in A$

x	1	1	1		1		1	1	2	2	2	3
y	2	2	2		3		3	4	3	3	4	4
z	3	4	5		4		5	5	4	5	5	5
$x+y+z$	6	7	8		8		9	10	9	10	11	12
$25-(x+y+z)$	19	18	17		17		16	15	16	15	14	13
u	9	8	7	8	7	8	7	7	7	7	不合	
w	10	10	10	9	10	9	9	8	9	8		

$M_e=7$：sum=30
max=10+6+5+4+3=28

$M_e=5$：sum=20　不合
min=8+7+6+2+1=24