12. 已知數列$\langle a_n \rangle$其前 n 項和$S_n = 2a_n - 3\times 2^n + 4$ （n 為正整數），試求a_n 的一般項為______________。

$(3n-1)\cdot 2^{n-1}$

$$-)\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 4$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 3\cdot 2^{n-1}$$

$$a_1 = 2a_1 - 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2a_{n-1} + \frac{3}{2}\cdot 2^n \qquad \Rightarrow a_1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2}(n-1) = \frac{3n-1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = (3n-1)\cdot 2^{n-1}$$

13. 試求$\sqrt{4x-2} = \dfrac{x^2+2}{4}$的所有實數解為______________。

$2\pm\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y = \sqrt{4x-2} \Rightarrow x = \dfrac{y^2+2}{4} \\ y = \dfrac{x^2+2}{4} \end{cases}$$

互為反函數

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+2}{4} \\ y = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2\pm\sqrt{2}$$

二、非選擇題與證明題（計 3 題，共 22 分）：

1. 已知ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊為a、b、c （$a \neq b$），且$\angle A = \alpha$，$\angle B = \alpha - 2\beta$ ；有另一個$\Delta A'B'C'$，$\angle A'$、$\angle B'$、$\angle C'$ 的對邊為a'、b'、c'，且$\angle A' = \alpha - \beta$，$\angle B' = \beta$，其中$0^\circ < 2\beta < \alpha < 180^\circ$

試證明：$\dfrac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{b'^2 + c'^2 - a'^2} = \dfrac{a+b}{a-b}$

(證明題，8 分。請勿將α，β 以帶入特別角的方式進行驗證)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\sin A' \ \cos B'}{\cos A' \ \sin B'} = \frac{a' \cdot \dfrac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{a'c'}}{b' \cdot \dfrac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{b'c'}} = \sim \ \#$$

2. 已知$x>1$，$y>1$，$z>1$且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，試證$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

(證明題，8 分。)

$1=3-2=\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}$

$\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)(x+y+z)\geq\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2 \Rightarrow \sim$ #

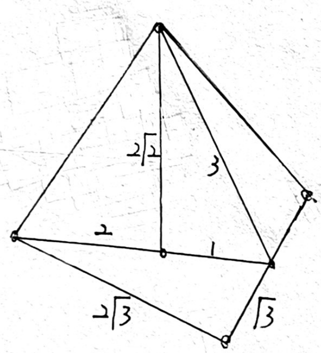
3. 坐標空間中，考慮三個平面$E_1:x+y+z=7$、$E_2:x-y+z=3$、$E_3:x-y-z=-5$，若坐標空間中第四個平面E_4與E_1、E_2、E_3圍出一個邊長為$6\sqrt{2}$的正四面體，試求出E_4的方程式（寫成$x+ay+bz=c$的形式）

$x+y-z=11$ or -13

上述為 113 學年度分科測驗數學甲試題，請使用三種方法解答此題，書寫時請詳列計算過程。

(非選擇題，6 分。使用三種以上方法得 6 分，使用二種方法得 3 分，只使用一種方法或未作答不予計分)

交點 $P(1,2,4)$



令 $\vec{n_1}=(1,1,1)$, $\vec{n_2}=(-1,1,-1)$, $\vec{n_3}=(1,-1,-1)$

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}=\vec{n_3}\cdot\vec{n_1}<0$

法1: $\vec{n_4}\parallel\vec{n_1}+\vec{n_2}+\vec{n_3}=(1,1,-1)$

E_4: $x+y-z=k$

$d(P,E_4)=6\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}=\frac{|-1-k|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |k+1|=12$ or $-12 \Rightarrow \sim$ #

法2: $\cos\theta=\frac{1}{3}$, $\vec{n_4}=(1,a,b)$

$1+a^2+b^2=3$

$\begin{cases}\vec{n_4}\cdot\vec{n_1}=1\\ \vec{n_4}\cdot\vec{n_2}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\ a-b=2\end{cases}$

$\Rightarrow a=1,\ b=-1$

$\Rightarrow \sim$ #

法3: $\vec{n_4}\cdot\vec{n_1}=\vec{n_4}\cdot\vec{n_2}=\vec{n_4}\cdot\vec{n_3}$

$\Rightarrow a+b+1=a-b-1=-(a+b)+1 \Rightarrow \begin{cases}a+b=0\\ b=-1\end{cases} \Rightarrow \sim$ #