

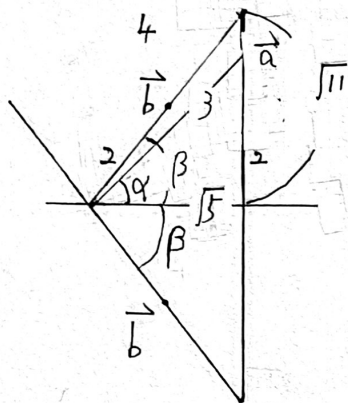
3. 平面上有三個向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} ，滿足 $\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} = \frac{1}{2}$ 且 $|\vec{a}|=3$ ， $|\vec{b}|=2$ ，已知 \vec{a} 在 \vec{c} 的正射影長度為 $\sqrt{5}$ ，

$$\frac{2\sqrt{11} \pm 5}{4}$$

4

求 \vec{a} 在 \vec{b} 的正射影長度為

當 $\alpha \in I$



$$\frac{2 \cos \beta}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|\vec{a}| \cos(\beta - \alpha) = \frac{5 + 2\sqrt{11}}{4 \cdot 3} \cdot 3$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{11} \pm 5}{4}$$

$$|\vec{a}| |\cos(\alpha + \beta)| = -\frac{5 - 2\sqrt{11}}{4 \cdot 3} \cdot 3$$

4. 若 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{22}{21} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix}$ ， $n \in N$ ，則當 n 的取值最少為_____時， c_n 開始會大於 d_n 。

15

($\log 2 \approx 0.301$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ， $\log 11 \approx 1.0414$)

$$\text{令 } B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{21} \\ 0 & \frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bd \\ 0 & d^2 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & bd^2 \\ 0 & d^3 \end{bmatrix}$$

$$(I + B)^n \sim$$

$$\Rightarrow C_n = C_1^n \frac{2}{21} + C_2^n \frac{2}{21^2} + \dots + C_n^n \frac{2}{21^n}$$

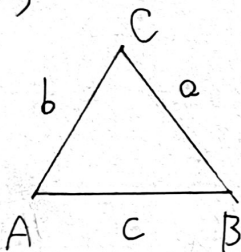
$$d_n = 1 + C_1^n \frac{1}{21} + C_2^n \frac{1}{21^2} + \dots + C_n^n \frac{1}{21^n}$$

$$C_n > d_n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{21}\right)^n - 1 > 1$$

$$\Rightarrow n > \frac{\log 2}{\log 22 - \log 21} \approx 14.9 \Rightarrow n = 15$$

5. $\triangle ABC$ 中，已知 $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} + 2\vec{BC}) = 0$ 且 $\cos C = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，求 $\tan A : \tan B : \tan C =$ _____。

1:2:3



$$b \cos A = 2a \cos B$$

$$\Rightarrow 2 \tan A = \tan B$$

$$\text{令 } \tan A = t, \tan B = 2t$$

$$t + 2t + 3 = t \cdot 2t \cdot 3$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \quad \begin{matrix} 2 & + & 1 \\ 1 & - & 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow 1:2:3$$