臺北市立內湖高級中學
114 學年度第 2 次正式教師甄選數學科初選筆試試題卷

考試說明：

(1) 本試題共18題填充題，第1題至第13題每題5分，第14題至第18題每題7分，共100分。

(2) 請將正確答案填入答案卷的題格中，不需計算過程。

(3) 各題答案若非整數，以最簡分數或最簡根式作答。

一、 填充題

1. 設多項式 $f(x)=2x^2-x-6$ 且 c 為實數。若 $f(f(x))$ 與 $f(x)\times f(x)$ 除以 $x-c$ 有相同的餘式，則此餘式為________。

2. 設有一個邊長為 3 的正$\triangle ABC$，點 P 在$\triangle ABC$ 的內部，若 $\overline{PB}=2,\overline{PC}=\sqrt{5}$ ，求 $\overline{PA}^2$ 為________。

3. 從 2 到 2025 的連續整數中，任意選出兩個數字 a 與 b (數字可重複)，則整數 3^a+7^b 的個位數字是 8 的機率為____。

4. 求 $C_1^{2025}-C_3^{2025}+C_5^{2025}-C_7^{2025}+\cdots-C_{2023}^{2025}+C_{2025}^{2025}$ 之值為 ________。

5. 已知一個邊長為 2 正四面體 $ABCD$，且 M 是 $\overline{CD}$ 中點，設點 A 對於平面 BCD 的對稱點為 A'，點 B 對於平面 ACD 的對稱點為 B'，求 $\Delta A'MB'$ 的面積為 ________。

6. 對於一組數據 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，定義 x_i 的 T 分數 T_i 計算方式為：$T_i=50+10\times\dfrac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}$，其中 μ_x 為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算術平均數，σ_x 為 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的標準差。現有某測驗分兩批考生施測：第一批施測的考生有 100 位，這 100 位考生原始測驗成績的平均分數為 60 分；第二批施測的考生有 50 位，這 50 位考生原始測驗成績的平均分數為 66 分。小廷是第一批施測的考生，他的原始測驗成績為 84 分。已知小廷的原始測驗成績在第一批施測的考生成績中，轉換得 T 分數為 62 分；小廷的原始測驗成績在全體（即兩批施測考生，共 150 人）考生成績中，轉換得 T 分數為 60 分。設第二批施測考生原始測驗成績的標準差為 σ 分，若 $\sigma=\sqrt{a}$，則 a 的值為__________。

（註：同一考生不會參加這個測驗兩次。）

7. 坐標空間中，設 A,B 兩點在某直線 L 上的投影點分別為 C,D。已知 $\overline{AC}=\overline{BD}=2$，且 AC,BD 兩直線方程式分別為 AC：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$，$BD$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{-2}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為________。

8. 若已知實數 α,β 滿足 $\left(\sqrt{13}\right)^{\alpha}=\sqrt{13}-\alpha$ 及 $\log_{\sqrt{13}}\beta=\sqrt{13}-\beta$，則 $\left(\sqrt{13}\right)^{\alpha}+(\alpha+\beta)^2+\log_{\sqrt{13}}\beta=$________。

9. 考慮方程式$z^3-2z^2-2z-3=0$的三個相異根，這三個根在複數平面上所成三角形的外心為$a+bi$，a,b為實數，
求數對$(a,b)=$________。

10. 設a，b為實數。若函數$f(x)=\dfrac{2ax+b}{x^2+1}$的最大值為 3，最小值為$-2$，求數對$(a,b)$ $=$__________。

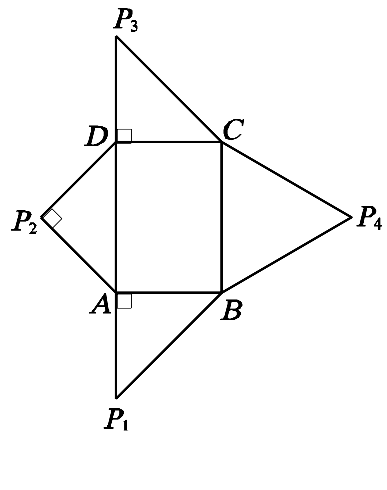
11. 坐標空間中，球A的球心坐標為原點$O(0,0,0)$，半徑為 1；球B的球心坐標為$P(r,0,0)$，半徑為 1，其中$0<r<2$。設V為球A與球B的聯集所形成的體積，試將V寫為r的函數為$V(r)=$__________。
（註：「球A與球B的聯集」指的是由球A和球B中至少一個球體包含的所有點所構成的立體圖形）

12. 設x為實數且x不是整數，若$x+\dfrac{114}{x}=[x]+\dfrac{114}{[x]}$，則$x=$__________。（$[x]$表示不大於$x$的最大整數。）

13. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。考慮坐標平面上四點 $O(0,0)$, $A(a,b)$, $B(a,b+1)$, $C(0,1)$ ，其中 a 與 b 為互質的正整數，且 $a>1$。若平行四邊形 $OABC$ 的內部（不含邊界）的格子點分別為 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ ，試求所有 $\triangle OP_iA$ （ $i=1, 2, \cdots, k$ ）的面積中最小值為______。

14. 設平面上的一個四邊形 $ABCD$ ，$\angle BAD=90^\circ$ ，$\angle BAC=60^\circ$ ，已知 $\overline{AB}=6$ ，$\overline{AD}=8$ ，$\overline{AC}=14$。若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$ ，其中 $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=1$，求所有 P 點所形成區域的面積為 ________。

15. 有一底面為長方形的四角錐 $P-ABCD$ ，其展開圖如右圖所示，其中 $\overline{AD}=\sqrt{2}\,\overline{AB}$ ，且 $\triangle P_1AB$、$\triangle P_2AD$、$\triangle P_3CD$ 均為等腰直角三角形。設平面 PAB 與平面 PBC 之夾角為 θ，求 $\sin\theta$ 為________。



16. 設 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ 為兩不平行的非零向量，$|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=4$。設 $t=k$ 為滿足 $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ 為最小的實數，求 $\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}+(k-2)\overrightarrow{b})$ =__________。

17. 空間中，考慮以下兩圓 C_1 與 C_2：C_1 是平面 $z=\sqrt{2}$ 上圓心在 $\left(0,0,\sqrt{2}\right)$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓；C_2 是平面 $z=-\sqrt{2}$ 上圓心在 $\left(0,0,-\sqrt{2}\right)$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓。給定 $P(x,y,z)$ 為空間中的一點，設 P 到圓 C_1 上任一動點距離的最小值為 m，P 到圓 C_2 上任一動點距離的最大值為 M，並將 $\sqrt{x^2+y^2}$ 記作 r（即 $r=\sqrt{x^2+y^2}$）。若 $M+m=2\sqrt{6}$，試求此條件下 r 與 z 的關係式為 ＿＿＿＿＿＿。

18. 設 a,b 為實數。坐標平面上，點 $P_n(x_n,y_n)$（$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）滿足以下定義：

$$\begin{cases}(x_{n+1},y_{n+1})=(ax_n-by_n,bx_n+ay_n), & n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\\(x_0,y_0)=(1,0)\end{cases}$$

若 $P_0=P_6$，且 $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$ 為坐標平面上相異的六點，試求數對 $(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿。

~試題結束，祝您考試順利！~