[1] 法1：設 $a_n=\sqrt{2024+a_{n-1}}$，$44<a_1=\sqrt{2024}<45 \Rightarrow 45<\sqrt{2068}=\sqrt{2024+44}<a_2=\sqrt{2024+a_1}<\sqrt{2024+45}=\sqrt{2069}<46$

$44^2=1936$，$45^2=2025$，$46^2=2116$ $\Rightarrow 45<\sqrt{2069}=\sqrt{2024+45}<a_3=\sqrt{2024+a_2}<\sqrt{2024+46}=\sqrt{2070}<46 \Rightarrow \cdots$

$\boxed{45<a_{2024}<46}$

法2：不嚴謹的猜法 $a=\sqrt{2024+a}$ $\Rightarrow a^2-a-2024=0$ $\Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{8097}}{2}\in(45,46)$

臺北市立第一女子高級中學 113 學年度第一次正式教師甄選

數學科測驗題試題暨答案

[2] $\begin{cases}x^2>0\\ x>0\\ \log x-1\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\geq 10$，令 $t=\log x$

$\sqrt{t-1}<5-2t \Rightarrow 5-2t>0 \Rightarrow t<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow 4t^2-21t+26>0$ $\Rightarrow t<2$ or $t>\frac{13}{4}$

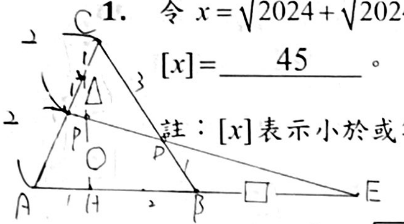
$\Rightarrow 10\leq x<100$

填充題

[4]

1. 令 $x=\sqrt{2024+\sqrt{2024...+\sqrt{2024+\sqrt{2024+\sqrt{2024}}}}}$，其中 2024 共出現 2024 次，則 $[x]=$ __45__。

註：$[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。



[3]

正面個數	0	1	2	3	4
			$\vee+\_+\vee$	$\vee+\_+\vee+\_+\vee$	$\vee+\_+\vee+\_+\vee+\_+\vee$
排法	1	$C^8_1=8$	$H^3_5=C^7_2=21$	$H^4_3=C^6_3=20$	$H^5_1=C^5_1=5$

$1-\dfrac{55}{256}=\dfrac{201}{256}$

2. 不等式 $\log(x^2)+\sqrt{(\log x)-1}<5$ 的實數解為 __$10\leq x<100$__。

$\frac{2}{2}\cdot\frac{\square+3}{\square}\cdot\frac{1}{3}=1 \Rightarrow \square=\frac{3}{2}$

2024
4.13(六)
Ru

3. 連續投擲公正硬幣 8 枚並排成一列，則有出現相鄰兩枚都是正面的機率為 __$\dfrac{201}{256}$__。

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}\cdot\frac{O}{\Delta}\,\frac{14}{9}=1$

4. 在 ΔABC 中，已知點 D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$，點 F 與點 G 都在 $\overline{CA}$ 上且

$\Rightarrow \Delta:O=14:9$

$\overline{CF}:\overline{FG}:\overline{GA}=1:1:2$，點 H 在 $\overline{AB}$ 上且 $\overline{AH}:\overline{HB}=1:2$。若 $\overline{DG}$ 與 $\overline{FH}$ 交於 P 點，則

$\overline{FP}:\overline{PH}=$ __$9:14$__

[6] 設 $f(x)=x^3+Bx^2+Cx+D$

$2f(0)=2D=2B+2D$ $\Rightarrow B=0$

$f(-1)=-C+D-1$，$f(0)=D$，$f(1)=Dr=C+D+1$，$f(2)=Dr^2=2C+D+8$，$f(3)=Dr^3=3C+D+27$

$C+1$，$Dr-D=C+1$，$Dr^2-Dr=C+7$，$Dr^3-Dr^2=C+19$

$Dr-D-C-1=0$，$Dr^2-2Dr+D=6$，$Dr^3-2Dr^2+Dr=12$

$\Rightarrow r=\frac{12}{6}=2$，$D=D(4-4+1)=6$，$C+1=6$，$C=5$

$\boxed{\Rightarrow f(x)=x^3+5x+6}$

$\boxed{\dfrac{a-c}{b}}$

[5]

5. 設橢圓 Γ 的中心為原點，且其長軸落在 x 軸上。以原點為旋轉中心，逆時針旋轉銳角 θ 的線性變換，將 Γ 變換為新橢圓 $\Gamma':91x^2-24xy+84y^2-300=0$。已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 y 軸正向，則 P 點的坐標為 __$\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{7},\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right)$__。

$\cot 2\theta=\frac{7}{-24}$（25，24，$2\theta$，$-7$）

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$y^2=\frac{300}{84}=\frac{25}{7}$

$(0+\frac{5}{\sqrt{7}}i)=(x+yi)e^{i\theta}$

$\Rightarrow (x+yi)=(0+\frac{5}{\sqrt{7}}i)\boxed{\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)}=\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}}i$ （$e^{i(-\theta)}$）

6. 已知 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且三次項係數為 1。若 $f(x)$ 滿足 $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$ 依序成等差數列且 $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$ 依序成等比數列，則 $f(x)=$ __x^3+5x+6__。

[7]

7. 若 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，則 $\int_0^{10}[x[x]]\,dx=$ __303__

	$x[x]$	Area
$1\leq x<2$	$[1,2)$	1
$2\leq x<3$	$[4,6)$	$\frac{1}{2}(4+5)=\frac{1}{2}(2^2\times 2+1)$
$3\leq x<4$	$[9,12)$	$\frac{1}{3}(9+10+11)=\frac{1}{3}(3^2\times 3+1+2)$
$4\leq x<5$	$[16,20)$	$\frac{1}{4}(16+17+18+19)=\frac{1}{4}(4^2\times 4+1+2+3)$
$9\leq x<10$	$[81,90)$	$\frac{1}{9}(81+82+\cdots 89)=\frac{1}{9}(9^2\times 9+(1+\cdots 8))$

$k^2+(1+2+\cdots+(k-1))$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{9}\left(k^2+\frac{k-1}{2}\right)=\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9\cdot 8}{2}$

$=285+18=303$

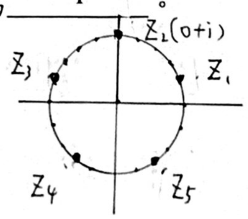
[8]

8. 設 k 為實數，且方程式 $(x+\sqrt{3}+ki)^5=32i$ 有兩相異實根，其中 $i=\sqrt{-1}$，則所有 k 的可能值之總和為 __-1__。

$z=x+\sqrt{3}+ki$

$=\left(32e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right)^{\frac{1}{5}}$

$=2e^{i(\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n)}$（$18^\circ$，$72^\circ$）



$z_1+z_2+\cdots z_5=0$

$0+i$

$\Rightarrow$ 實部 $+i(1+\square)=0$

0

所求 $=-1$